На правах рукописи

БИКЧЕНТАЕВ АЙРАТ МИДХАТОВИЧ

СЛЕД И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ C^*-АЛГЕБР КОМБИНАЦИЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Казань — 2011

Работа выполнена в НИЦ «НИИММ им. Н. Г. Чеботарева» Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор **Шерстнев Анатолий Николаевич**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Амосов Григорий Геннадьевич**

доктор физико-математических наук,
профессор **Асташкин Сергей Владимирович**

доктор физико-математических наук,
профессор **Григорян Сурен Аршакович**

Ведущая организация — ФГОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Защита состоится 29 марта 2012 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 в ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, ауд. 337.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

Автореферат разослан «_____» декабря 2011 г. и размещен на официальном сайте ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»: www.ksu.ru

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
кандидат физико-математических наук,
доцент Е. К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

1. Актуальность темы исследования. Теория операторных алгебр занимает центральное место в арсенале средств современной математической физики и является быстро развивающейся областью исследований, для которой характерно тесное переплетение чисто математического и прикладного аспектов. Это обусловлено тем, что на языке алгебр операторов, их состояний, представлений и групп автоморфизмов удается описывать и исследовать свойства модельных систем с бесконечным числом частиц, изучаемых квантовой теорией поля и статистической физикой.

Основным объектом этой теории являются инволютивные топологические алгебры ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве. Основополагающими трудами явился цикл обширных работ Дж. фон Неймана по алгебрам операторов, замкнутых в слабой операторной топологии (30–40-е годы двадцатого века), часть из которых выполнена в соавторстве с Ф. Дж. Мюрреем[1]. Такие алгебры (их вначале называли “кольцами операторов”) именуются теперь W^*-алгебрами или алгебрами фон Неймана. Алгебры, замкнутые в топологии нормы, или C^*-алгебры, начали изучать в 1943 г. И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк[2].

Теория алгебр фон Неймана получила развитие в работах Х. Дая, И. Капланского, И. Сигала, Ж. Диксмье, Ш. Сакаи, М. Томита, М. Такесаки, Ф. Комба, А. Конна и др. и в настоящее время представляет собой обширную и интенсивно развивающуюся часть общей теории банаховых алгебр, богатую интересными и глубокими результатами и связанную со многими разделами математики, теоретической и матема-

[1]Нейман Дж. фон. Избранные труды по функциональному анализу. В двух томах / Дж. фон Нейман. – М.: Наука, 1987. – 376 с. (Т. 1), 372 с. (Т. 2).

[2]Гельфанд И. М. О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве / И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк // Матем. сборник. – 1943. – Т. 12, № 2. – С. 197–213.

тической физики. Одним из главных разделов этой теории является схема классификации алгебр фон Неймана, опирающаяся на понятие эквивалентности проекторов и на связанные с ним понятия конечного и бесконечного проекторов. Эти понятия позволяют построить теорию относительной размерности на множестве проекторов, определить конечные, полуконечные, собственно бесконечные алгебры фон Неймана и построить на этих алгебрах следы. Структура алгебр фон Неймана позволяет использовать геометрические и топологические методы при исследовании свойств этих алгебр, в то же время важные разделы теории алгебр фон Неймана (классификация проекторов, разложение по типам, полярное разложение, существование функции размерности) имеют чисто алгебраическое происхождение.

Йордановы алгебры самосопряженных операторов (JC- и JW-алгебры) являются вещественными неассоциативными аналогами C^*- и W^*-алгебр; в настоящее время их теория продолжает интенсивно развиваться и находит интересные приложения во многих отраслях математики и квантовой теории. Впервые систематическое изложение теории JW-алгебр было дано в 1965 г. Д. Топпингом[3], хотя алгебраические предпосылки уже имелись в работе Йордана–фон Неймана–Вигнера[4] и в работе фон Неймана[5]. Глубокие результаты в теории йордановых банаховых алгебр получили Е. Штёрмер, Е. Альфсен, Ф. Шульц, У. Хаагеруп, Ш. А. Аюпов и др.

При обычном походе, основы которого заложены в работах П. Дирака, В. Гейзенберга, М. Борна и др., квантовомеханическим наблюдаемым сопоставляются эрмитовы операторы в гильбертовом пространстве квантовомеханических состояний [6]. При алгебраическом подходе всякой кван-

[3] Topping D. M. Jordan algebras of self-adjoint operators / D. M. Topping // Mem. Amer. Math. Soc. – 1965. – № 53. – 48 p.

[4] Jordan P. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism / P. Jordan, J. von Neumann, E. Wigner // Ann. Math. – 1934. – V. 35, № 1. – P. 29–64.

[5] Фон Нейман Дж. Обобщение математического аппарата квантовой механики методами абстрактной алгебры / Дж. фон Нейман // Матем. сборник. – 1936. – Т. 1, № 4. – С. 415–484.

[6] Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики / Дж. фон Нейман. – М.: Наука,

товомеханической системе сопоставляется алгебра наблюдаемых, которая является бесконечномерным векторным пространством над полем действительных чисел, и в ней определены алгебраические операции, позволяющие любым двум наблюдаемым, взятым в определенном порядке, однозначно сопоставить третью наблюдаемую. Одна из таких операций – йорданово произведение наблюдаемых, которое при обычной формулировке квантовой механики равно полусумме двух произведений (эрмитовых операторов, соответствующих двум наблюдаемым), различающихся порядком сомножителей. Ключевую роль в алгебраической теории играет понятие состояния, определяемого как элемент векторного пространства, дуального к алгебре наблюдаемых. В изучении динамического поведения квантовомеханических систем важным является вопрос о сходимости (в том или ином смысле) чезаровских средних, составленных из сохраняющих меру преобразований (в частности, абсолютных сжатий) алгебры наблюдаемых, т. е. возникает потребность в различных эргодических теоремах в соответствующих алгебрах. Различные "некоммутативные" эргодические теоремы получили Я. Г. Синай и В. В. Аншелевич, Ш. А. Аюпов, М. Ш. Гольдштейн, Ф. Йедон, Р. Яйте и др.

Оформление общей теории интегрирования относительно унитарно-инвариантных мер в полуконечных алгебрах фон Неймана было осуществлено И. Сигалом[7] в 1953 г. Он также осуществил вложение классической теории интегрирования на пространстве с мерой в построенную им схему интегрирования относительно нормального следа, в которой роль измеримых функций играют неограниченные измеримые операторы, присоединенные к алгебре. Теория Сигала нашла эффектные приложения в теории двойственности для унимодулярных локально компактных групп[8] и теоретической физике, инициировала целый

1964. – 366 с.

[7]Segal I. E. A non-commutative extension of abstract integration / I. E. Segal // Ann. Math. – 1953. – V. 57, № 3. – P. 401–457.

[8]Stinespring W. F. Integration theorems for gages and duality for unimodular groups /

поток исследований по “некоммутативной” теории вероятностей. Идеи и методы общей теории интегрирования относительно унитарно инвариантных мер позволили изучить важный класс статистических задач, возникающих в теории квантовых измерений, и выходящих за рамки обычной постановки в терминах пространства элементарных событий. Это привело к созданию некоммутативной теории статистических решений. Последовательное построение этой теории осуществлено в трудах А. С. Холево. Дальнейший прогресс в теории некоммутативного интегрирования был стимулирован созданием фундаментальной теории Томита–Такесаки и исследованиями Ф. Комба по теории весов на алгебрах фон Неймана, что позволило описать некоммутативные L_p-пространства, ассоциированные с произвольным точным нормальным полуконечным весом. Различные подходы к описанию таких пространств предложены в работах У. Хаагерупа, А. Конна, М. Хилсума, А. Н. Шерстнева, Н. В. Трунова, Х. Араки, Т. Масуды, Х. Косаки, О. Е. Тихонова (см. монографии[9,10]). Отметим также исследования Ш. А. Аюпова и Н. В. Трунова, связанные с построением теории неассоциативного интегрирования на йордановых алгебрах.

Одновременно с развитием теории некоммутативного интегрирования для весов и неограниченных мер на проекторах продолжались исследования различных классов банаховых и F–нормированных пространств измеримых по Сигалу операторов, являющихся некоммутативными аналогами классических идеальных функциональных пространств: L_p-пространств Лебега, пространств Орлича, Лоренца, Марцинкевича. Изучались топологии и сходимости, связанные со следом на алгебре фон Неймана. Некоммутативные симметричные пространства измеримых операторов исследовали В. И. Овчинников, Ф. Йедон,

W. F. Stinespring // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – V. 90, № 1. – P. 15–56.

[9]Takesaki M. Theory of operator algebras. V. II / M. Takesaki. Encyclopaedia of mathematical sciences, 125. Operator algebras and noncommutative geometry, 6. – Berlin: Springer, 2003. – 518 p.

[10]Шерстнев А. Н. Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла / А. Н. Шерстнев. – М.: Физматлит, 2008. – 264 с.

В. И. Чилин, М. А. Муратов, Х. Косаки, Ф. А. Сукочев, П. Доддс, Т. К. Доддс, Б. де Пагтер и др. В случае алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ класс некоммутативных симметричных пространств совпадает с классом симметричных идеалов компактных операторов, теория которых получила развитие в работах Р. Шэттена, И. Ц. Гохберга, М. Г. Крейна, Б. Саймона, М. Ш. Бирмана, М. З. Соломяка, С. Квапеня, А. Пелчиньского, Дж. Арази, Ч. Маккарти, Дж. Линденштраусса и др.

Ф. Йедон[11] определил алгебру локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана и ввел в ней топологию сходимости локально по мере и сходимость локально почти всюду. Сходимость по мере впервые появилось в [7] как $*$-сходимость к сходимости почти всюду. Свойства топологий сходимости по мере и локально по мере исследовали также В. Ф. Стаинспринг[8], Е. Нельсон[12], Ф. Йедон, О. Е. Тихонов, М. Терп[13], В. И. Чилин, М. А. Муратов, Т. Фак, Х. Косаки, Ф. А. Сукочев, П. Доддс, Т. К. Доддс, Б. де Пагтер, Л. Циах и др. В полуконечном случае сходимость локально по мере совпадает с грубой сходимостью, введенной в [8]. М. А. Муратовым рассмотрены двусторонние сходимости по мере и почти всюду и установлены их связи с (o)-сходимостью. Ш. А. Аюпов и Р. А. Абдуллаев исследовали топологию сходимости по мере, ассоциированную со следом на йордановой алгебре.

Исследования по задачам характеризации следов в классе нормальных весов или функционалов на алгебрах фон Неймана начались в 70-е годы двадцатого века; интересные результаты получили М. С. Матвейчук, Л. Т. Гарднер, Х. Упмайер, Г. К. Педерсен, Е. Штёрмер, Ш. А. Аюпов, Д. Петц, Я. Земанек, О. Е. Тихонов, А. Н. Шерстнев, Т. Сано, Т. Ят-

[11] Yeadon F. J. Convergence of measurable operators / F. J. Yeadon // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1973. – V. 74, № 2. – P. 257–268.

[12] Nelson E. Notes on non-commutative integration / E. Nelson // J. Funct. Anal. – 1974. – V. 15, № 2. – P. 103–116.

[13] Terp M. L^p-spaces associated with von Neumann algebras / M. Terp. – Copenhagen: Copenhagen Univ., 1981. – 100 p.

су, Динь Чунг Хоа, К. Чо и др. Недавние продвижения в теории сингулярных следов на идеалах компактных операторов и важные приложения этой теории в некоммутативной геометрии (см. обзоры[14,15]) привели к задачам характеризации следов в более широких классах весов на алгебрах фон Неймана. Кроме того, есть много внутренних нерешенных проблем теории операторов и теории некоммутативного интегрирования. Например, проблема существования инвариантного подпространства линейного оператора в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве и проблема У. Хаагерупа о том, будет ли каждый нормальный субаддитивный вес на W^*-алгебре σ-слабо полунепрерывным снизу[16]. В § 2.5 диссертации дано положительное решение проблемы У. Хаагерупа для случая абелевых W^*-алгебр. В общем случае проблема остается открытой.

Результаты, представленные в диссертации, продолжают исследования в выше перечисленных направлениях. Таким образом, важность решаемых в диссертации задач делает тему диссертации актуальной.

2. Связь работы с крупными научными программами. Работа поддержана Французским математическим обществом (индивидуальный грант за 1993 г.), Единым заказ-нарядом (ФУМА-1 за 1995–2000 г.г.), Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 95–01–00025, 98–01–00103, 01–01–00129, 05–01–00799), Программой “Университеты России – Фундаментальные исследования” (гранты УР. 1617 (1999 г.), УР.04.01.061 (2002–2003 г.г.)), Федеральным агентством по науке и инновациям (госконтракт 02.740.11.0193 за 2008–2011 г.г.).

3. Цель работы. Основными целями настоящей работы являются:

1. Представления элементов широкого класса C^*-алгебр в виде ко-

[14] Кери А. Л. Следы Диксмье и некоторые приложения в некоммутативной геометрии / А. Л. Кери, Ф. А. Сукочев // Успехи матем. наук. – 2006. – Т. 61, № 6. – С. 45–110.

[15] Кордюков Ю. А. Теория индекса и некоммутативная геометрия на многообразиях со слоением / Ю. А. Кордюков // Успехи матем. наук. – 2009. – Т. 64, № 2. – С. 73–202.

[16] Haagerup U. Normal weights on W^*-algebras / U. Haagerup // J. Funct. Anal. – 1975. – V. 19, № 3. – P. 302–317.

нечных сумм произведений проекторов из алгебры.

2. Получение новых характеризаций следов среди линейных функционалов или весов на C^*-алгебрах неравенствами.

3. Исследование топологии сходимости по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана и получение новых характеризаций основных типов таких алгебр.

4. Научная новизна исследования. Все основные результаты, представленные в настоящей работе и выносимые на защиту, являются новыми.

5. Объектом исследования настоящей работы являются проблемы теории операторных алгебр и теории некоммутативного интегрирования.

6. Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту.

1. Получены представления элементов широкого класса C^*-алгебр в виде конечных сумм произведений проекторов из алгебры. Доказано, что если алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет правильный тип[17] (соответственно собственно бесконечна), то каждый оператор $X \in \mathcal{M}$ представляется в виде конечной суммы $X = \sum_k X_k$, где каждое X_k есть произведение не более, чем трех (двух) проекторов из $\mathcal{M}$. Показано, что каждый эрмитов (соответственно косоэрмитов) элемент собственно бесконечной алгебры фон Неймана представляется в виде конечной суммы йордановых произведений (коммутаторов) ее проекторов. Получены приложения к аппроксимативно конечномерным алгебрам.

2. Найдены новые необходимые и достаточные условия коммутирования проекторов в терминах операторных неравенств. Эти неравенства и неравенства Гёльдера, Коши–Буняковского–Шварца, Голдена–Томпсона применены для характеризации следа на алгебрах фон Неймана в

[17]т. е. компонента конечного типа I алгебры $\mathcal{M}$ отсутствует или представима в виде прямой суммы $\mathbb{M}_{n_1}(\mathcal{N}_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{M}_{n_k}(\mathcal{N}_k)$, где $\mathcal{N}_m$ – некоторые алгебры фон Неймана и $2 \leq n_m \in \mathbb{N}$, $m = 1, \ldots, k$.

классе всех положительных нормальных функционалов. Получена характеризация следа на алгебрах фон Неймана в терминах коммутирования произведений проекторов под знаком веса. Доказано, что каждое из неравенств Пайерлса–Боголюбова и Араки–Либа-Тирринга характеризует следы в классе всех положительных функционалов на C^*-алгебре. Получено положительное решение проблемы У. Хаагерупа (1975) о нормальных субаддитивных весах для случая абелевых W^*-алгебр.

3. Установлены новые алгебраические, топологические и порядковые свойства некоммутативных L_p-пространств и топологии сходимости по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана. Исследованы свойства топологий локальной и слабо локальной сходимости по мере. Получены характеризации конечных, счетноразложимых, непрерывных, атомических и конечномерных алгебр в классе всех полуконечных алгебр фон Неймана в терминах указанных топологий.

7. Методы исследования. Применены общие методы функционального анализа, теории операторных алгебр, спектральной теории для самосопряженных операторов и стандартные методы из теории топологических и метрических пространств. Использованы структурная теория алгебр фон Неймана, методы теории следов и весов на алгебрах фон Неймана и C^*-алгебрах, теории некоммутативного интегрирования.

8. Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена тем, что:
– применяются проверенные, точные и строго обоснованные методы исследования;
– часть результатов диссертации являются обобщением полученных ранее результатов и совпадают с этими результатами в частных случаях;
– все основные результаты диссертации доказаны и опубликованы.

9. Теоретическое и прикладное значение исследования. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они представляют интерес для исследований в рамках теории операторных алгебр, изучении неравенств для операторов и следовых неравенств в теории некоммутативного интегрирования. Результаты диссертации были использованы соискателем при чтении специальных курсов для студентов Казанского (Приволжского) федерального университета.

10. Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

• Итоговые научные конференции Казанского государственного университета в 1990–2011 г.г.

• Воронежские зимние математические школы в 1990, 2002 и 2007 г.г.

• XV конференция молодых ученых Московского государственного университета в апреле 1993 г.

• Международная конференция "Алгебра и анализ", посвященной 100-летию Н. Г. Чеботарева, Казань, 5–11 июня 1994 г.

• 2-я – 7-я и 9-я – 10-я международные Казанские летние научные школы-конференции 15–22 июня 1995 г., 16–22 июня 1997 г., 13–18 сентября 1999 г., 27 июня – 4 июля 2001 г., 27 июня – 4 июля 2003 г., 27 июня – 4 июля 2005 г., 1–7 июля 2009 г., 1–7 июля 2011 г.

• Международная конференция "XVII Seminar on Stability Problems of Stochastic Models", Казань, КГУ, 19–26 июня 1995 г.

• Международная конференция "Quantum Structures'96", Technische Universität Berlin, Германия, Берлин, 29 июля – 3 августа 1996 г.

• 9-я Всероссийская межвузовская конференция, Самара, Самарский государственный технический университет, 25–27 мая 1999 г.

• Международная научная конференция "Актуальные проблемы математики и механики" в НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева, Казань, 1–3 октября 2000 г.

• Международная конференция "Quantum Structures V", Int. Quantum Structures Association, Fifth Conference, Cesena-Cesenatico, Италия, 31 марта – 5 апреля 2001 г.

• Международная конференция "Kolmogorov and contemprorary mathematics", посвященная 100-летию академика А. Н. Колмогорова, Москва, МГУ, 16–21 июня 2003 г.

• Международная конференция “Linear operators and foundations of quantum mechanics”, посвященная 100-летию Джона фон Неймана, Венгрия, Будапешт, 15–20 октября 2003 г.

• Международные конференции “Operator Theory’20”, “Operator Theory’21”, “Operator Theory’23”, Румыния, Тимишоара, West University, 30 июня – 5 июля 2004 г., 28 июня – 4 июля 2006 г., 29 июня – 4 июля 2010 г.

• Международная конференция “Актуальные проблемы математики и механики”, посвященной 200-летию Казанского государственного университета, Казань, 26 сентября – 1 октября 2004 г.

• Международная конференция “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ”, посвященная 100-летию академика С. М. Никольского, Москва, МИРАН им. В. А. Стеклова, 23–29 мая 2005 г.

• Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященная памяти И. Г. Петровского, Москва, МГУ, 21–26 мая 2007 г.

• Международная конференция “16th St.Petersburg summer meeting in Mathematical Analysis”, г. Санкт-Петербург, международный математический институт Эйлера, 25–30 июня 2007 г.

• Международная школа-конференция “Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании”, посвященная 100-летию Башкирского государственного университета, г. Уфа, БашГУ, 1–6 октября 2009 г.

• Международная конференция “Актуальные проблемы математики и механики”, посвященная 75-летию НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета, Казань, 10–16 октября 2009 г.

• Международная научная конференция “Современные проблемы анализа и преподавания математики”, посвященная 105-летию академика С. М. Никольского, Москва, МГУ, 17–19 мая 2010 г.

• Международная конференция “Banach spaces geometry”, г. Санкт-Петербург, международный математический институт Эйлера, 5–11 сентября 2010 г.

• Восемнадцатая Всероссийская Школа-Коллоквиум по стохастическим методам, Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 1–8 мая 2011 г.

• Результаты докладывались на научном семинаре Казанского математического общества (руководитель: профессор А. В. Сульдин) в октябре 1992 г.; на научном семинаре Московского государственного университета (руководители: профессоры А. Г. Костюченко, А. М. Степин и А. А. Шкаликов) в 1995 г.; на научном семинаре Московского государственного университета (руководитель: профессор А. А. Шкаликов) в 1995, 2003 (24 октября) и 2005 г.г.; на научном семинаре Московского государственного университета (руководитель: профессор А. Я. Хелемский) в 2005 г.; на научном семинаре Московского государственного университета “Бесконечномерный анализ и математическая физика” (руководители: профессоры О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе), 21 февраля и 3 октября 2011 г.; на научном семинаре Казанского государственного университета “Алгебры операторов и их приложения” (руководитель: профессор А. Н. Шерстнев), регулярно в 1990–2010 г.г..

• В целом работа доложена на объединенном заседании кафедры математического анализа Казанского (Приволжского) федерального университета и отделения математики НИИММ им. Н. Г. Чеботарева Казанского (Приволжского) федерального университета.

11. Публикации и вклад автора в разработку исследованных проблем. Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в 34 работах (21 – в журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований), общим объемом 15,68 печатных листов. В [6] постановка (близкой) задачи об исчерпывании проекторно-выпуклыми комбинациями алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = \infty$, восходит к А. Н. Шерстневу. Ему же принадлежит определение 1.5.1 класса (UF). Результаты параграфа 2.4 получены совместно с О. Е. Тихоновым ([10], [32]); лемма 3.8.2, теорема 3.8.3, следствие 3.8.7, пример 3.8.13 а), лемма 3.8.14, теоремы 3.8.15 и 3.8.21 – совместно с А. А. Сабировой [18]. Остальные результаты принадлежат автору.

12. Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 19 параграфов и списка цитируемой литературы. В диссертации для лемм, предложений, теорем, примеров, замечаний принята тройная нумерация. Первая цифра обозначает номер главы, вторая – номер параграфа и третья – номер утверждения внутри параграфа. Библиографический список состоит из 34 наименований работ автора и 219 наименований других авторов. Общий объем диссертации составляет 254 страницы.

13. Краткое описание содержания работы по главам. Во введении обоснована актуальность темы исследования, дана общая характеристика работы и приведено краткое содержание работы.

Глава I содержит шесть параграфов и посвящена представлениям элементов C^*-алгебр в виде конечных сумм произведений проекторов.

Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – алгебра всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Для $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ наряду с обычным произведением XY будем использовать *йорданово* $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ и *лиево* (т. е. их *коммутатор*) $[X, Y] = XY - YX$ произведения. Оператор $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется *идемпотентом*, если $X = X^2$; *проектором*, если $X = X^2 = X^*$; *полуортогональным проектором*, если $X^*X = (X + X^*)/2$.

Для C^*-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$, $\mathcal{A}^{\mathrm{sh}}$, $\mathcal{A}^+$, и $\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ будем обозначать ее подмножества эрмитовых элементов, косоэрмитовых элементов, положительных элементов и проекторов, соответственно. Для унитальной

$\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ будем обозначать ее подмножество унитарных элементов. Пусть $\mathcal{A}^{\mathrm{sym}} = \mathcal{A}^{\mathrm{sa}} \bigcap \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$, $\mathcal{A}_1 = \{X \in \mathcal{A} : \ \|X\| \leq 1\}$, $\mathbb{I}$ – единица $\mathcal{A}$ и $P^{\perp} = \mathbb{I} - P$ для $P \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$.

Теория следов на C^*-алгебрах берет начало с фундаментального результата линейной алгебры: матричный след оператора инвариантен относительно выбора ортонормированного базиса и совпадает со спектральным следом. Роль этого инварианта и его следствий в современной математике и математической физике очень большая. *Весом* на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ называется отображение $\varphi : \mathcal{A}^+ \to [0, +\infty]$ со свойствами $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y), \quad \varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X) \quad (X, Y \in \mathcal{A}^+, \ \lambda \geq 0)$, (при этом полагается, что $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$). Вес φ на $\mathcal{A}$ называется *следом*, если $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{A}$; *точным*, если $\varphi(X) = 0 \Longrightarrow X = 0, \ X \in \mathcal{A}^+$; *конечным*, если $\varphi(X) < +\infty$ для всех $X \in \mathcal{A}^+$.

Задачи о представлениях операторов в форме комбинаций специального вида постоянно привлекают внимание исследователей. Эта проблематика подробно освещена в обзорах П. Ву[18,19]; см. также работы Л. Марку[20,21]. Такие представления – не только объект изучения, а часто выступают как инструмент. Так, Е. А. Горин[22] применил целочисленные комбинации идемпотентов для исследования характеров банаховых алгебр.

В §1.1 приводятся необходимые сведения из теории операторных алгебр и теории некоммутативного интегрирования относительно полуконечного следа на алгебре фон Неймана.

---

[18] Wu P. Y. The operator factorization problems / P. Y. Wu // Linear Algebra Appl. – 1989. – V. 117, № 1. – P. 35–63.

[19] Wu P. Y. Additive combination of special operators / P. Y. Wu. In book: Funct. Anal. Oper. Theory (Warszawa, 1992). Banach Center Publ. V. 30. – Warszawa: Polish Acad. Sci., 1994. – P. 337–361.

[20] Marcoux L. W. On the linear span of the projections in certain simple C^*-algebras / L. W. Marcoux // Indiana Univ. Math. J. – 2002. – V. 51, № 3. – P. 753–771.

[21] Marcoux L. W. Sums of small number of commutators / L. W. Marcoux // J. Operator Theory. – 2006. – V. 56, № 1. – P. 111–142.

[22] Горин Е. А. Несколько замечаний в связи с теоремами Гельфанда о группе обратимых элементов банаховой алгебры / Е. А. Горин // Функц. анализ и его прил. – 1978. – Т. 12, № 1. – С. 70–71.

В §1.2 двумя различными способами доказана

Теорема 1.2.1. *Если алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет правильный тип (соответственно собственно бесконечна), то каждый оператор $X \in \mathcal{M}$ представляется в виде конечной суммы $X = \sum_k X_k$, где каждое X_k есть произведение не более чем трех (соответственно двух) проекторов из $\mathcal{M}$.*

Все утверждения неулучшаемы по числу сомножителей. Наименьшая верхняя граница, равная трем, связана с существованием нетривиального конечного следа на конечных алгебрах правильного типа.

Ключевым моментом в доказательствах является найденное в теореме 4[23] представление элементов собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ в виде суммы пяти идемпотентов из $\mathcal{M}$. Для алгебры фон Неймана правильного типа доказательство опирается на новое представление операторов в виде конечных сумм попарных произведений проекторов и идемпотентов (лемма 1.2.6). Напомним, что алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ собственно бесконечна тогда и только тогда, когда $\dim \mathcal{H} = \infty$.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{D}$ – C^*-алгебры. Линейное отображение $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ называется *следовым*, если $\Phi(XY) = \Phi(YX)$ для всех $X, Y \in \mathcal{A}$; *положительным*, если $\Phi(X) \in \mathcal{D}^+$ для всех $X \in \mathcal{A}^+$. Из теоремы 1.2.1 вытекают новое доказательство основного результата работы[24]:

Следствие 1.2.11. *Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ собственно бесконечна и $\mathcal{A}$ – C^*-алгебра. Если положительное линейное отображение $\Phi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ является следовым, то $\Phi(X) = 0$ для всех $X \in \mathcal{M}$. В частности (см., например, с. 311[25]) на $\mathcal{M}$ нет нетривиальных конечных следов.*

Получено описание йордановой структуры эрмитовой части алгебры

---

[23] Pearcy C. Sums of small numbers of idempotents / C. Pearcy, D. M. Topping // Mich. Math. J. – 1967. – V. 14, № 4. – P. 453–465.

[24] Choi M.-D. Tracial positive linear maps of C^*-algebras / M.-D. Choi, S.-K. Tsui // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – V. 87, № 1. – P. 57-61.

[25] Takesaki M. Theory of operator algebras. V. I / M. Takesaki. – New York–Heidelberg–Berlin: Springer, 1979. – 415 p.

фон Неймана (“алгебры наблюдаемых” квантовой механики) в терминах проекторов (т. е. “вопросов” квантовой механики):

Следствие 1.2.13. *Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет правильный тип. Каждый оператор $X \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ представляется в виде конечной суммы $X = \sum_k X_k$, где каждое X_k есть йорданово тройное произведение не более чем трех проекторов, а для собственно бесконечной алгебры $\mathcal{M}$ – йорданово произведение не более чем двух проекторов из $\mathcal{M}$.*

Показано, что для произвольной C^*-алгебры $\mathcal{A}$ с нетривиальным конечным следом множество всех конечных сумм попарных произведений проекторов и полуортогональных проекторов (взятых в любом порядке) из $\mathcal{A}$ с положительными числовыми коэффициентами не плотно в $\mathcal{A}$ (теорема 1.2.18). В своей недавней работе Л. Марку[26] назвал выполняющееся для некоторых C^*-алгебр равенство

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_k P_k Q_k R_k : \ P_k, Q_k, R_k \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}} \right\}$$

(см. следствие 1.2.15) феноменальным и сопоставил его с тем, что иногда (см. лемму 1.2.3) множество

$$\left\{ \sum_k \lambda_k Q_k R_k : \ \lambda_k \in \mathbb{R}, \ Q_k, R_k \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}} \right\}$$

даже не плотно в C^*-алгебре $\mathcal{A}$.

В §1.3 доказано несколько утверждений о следах и коммутаторах идемпотентов в C^*-алгебрах. Некоторые из них усиливают и/или уточняют известные результаты. Показано, что если $\mathcal{A}$ – унитальная C^*-алгебра, $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ и $[P, Q]$ обратим, то и $P \circ Q$ обратим (теорема 1.3.6). С использованием основного результата §1.2 – теоремы 1.2.1 – доказана

[26]Marcoux L. W. Projections, commutators and Lie ideals in C^*-algebras / L. W. Marcoux // Math. Proc. R. Ir. Acad. – 2010. – V. 110A, № 1. – P. 31–55.

Теорема 1.3.7. *Каждый косоэрмитов элемент собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ представляется в виде конечной суммы коммутаторов проекторов из $\mathcal{M}$.*

В частности, при $\dim \mathcal{H} = \infty$ каждый оператор $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{sh}}$ представляется в виде конечной суммы коммутаторов проекторов. Для сепарабельного $\mathcal{H}$ приведено второе доказательство этого утверждения.

В §1.4 для полной матричной алгебры в терминах конечных сумм коммутаторов проекторов описано множество операторов с нулевым каноническим следом tr и описана область положительности следа tr в терминах конечных сумм попарных произведений проекторов (теорема 1.4.2). Показано (следствие 1.4.4), что матрица $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{\mathrm{sa}}$ является действительной частью некоторой нильпотентной матрицы тогда и только тогда, когда

$$X = \sum_k i[P_k,\, Q_k], \quad P_k, Q_k \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{\mathrm{pr}}.$$

Доказано, что каждая матрица $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ представляется в виде конечной суммы $X = \sum_k X_k$, где каждое X_k есть йорданово произведение проектора и идемпотента (теорема 1.4.6). Получены приложения к аппроксимативно конечномерным C^*-алгебрам (следствия 1.4.5 и 1.4.7).

В §§1.5–1.6 дано решение задачи о представлении элементов C^*-алгебр в виде конечных сумм произведений проекторов для широкого класса C^*-алгебр. Постановка (близкой) задачи об исчерпывании проекторно-выпуклыми комбинациями алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = \infty$, восходит к А. Н. Шерстневу. Ему же принадлежит

Определение 1.5.1. *Унитальная C^*-алгебра $\mathcal{A}$ обладает свойством унитарной факторизации (запись $\mathcal{A} \in$ (UF)), если каждый $U \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ является конечным произведением элементов из $\mathcal{A}^{\mathrm{sym}}$.*

В §1.5 с помощью индуктивного процесса (1.5.1) построено представление специального вида для элементов C^*-алгебр из класса (UF) (алгебра фон Неймана $\mathcal{M} \in$ (UF) тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ не имеет прямых слагаемых конечного типа I (предложение 1.5.2)). Результат является новым и для алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

В §1.6 установлено, что аналогичная задача для алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ при $2 \le \dim \mathcal{H} < \infty$ также имеет положительное решение (теорема 1.6.1). Тем самым дан ответ на вопрос Д. Х. Муштари и А. Н. Шерстнева.

Основные результаты по перечисленным темам опубликованы в статьях автора [3, 7, 8, 12, 21, 29, 33] и в совместной с А. Н. Шерстневым статье [6].

Глава II содержит пять параграфов и посвящена исследованию задач характеризации а) следа в классе всех весов на C^*-алгебре; б) следовых функционалов в классе всех положительных линейных функционалов на C^*-алгебре; в) коммутативности для C^*-алгебр.

В §2.1 приведены новые признаки коммутирования проекторов.

Теорема 2.1.3. *Для* $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $PQ = QP$;

(ii) $s_r(PQP) = s_r(QPQ)$;

(iii) $PQP \le Q$;

(iv) $e^{PQP} \le e^Q$;

(v) $(PQP)^p = PQP$ *для некоторого числа* $p > 1$;

(vi) $P + Q \ge P \vee Q$;

(vii) $P + Q \le \mathbb{I} + P \wedge Q$.

(viii) $|P - Q| \le P + Q$;

(ix) $e^{P+Q} \le e^{P/2} e^Q e^{P/2}$;

(x) $e^{P/2} e^Q e^{P/2} \le e^{P+Q}$;

(xi) $\mathrm{Re}\, PQ \le |PQ|$;

(xii) $\mathrm{Im}\, PQ \ge 0$;

(xiii) $P \circ Q \ge 0$;

(xiv) $f(P + Q) \le f(P) + f(Q)$ *для некоторой измеримой вогнутой функции* $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *с* $f(0) = 0$, *строго вогнутой на отрезке* $[0, 1]$.

Найдены достаточные условия перестановочности проектора с унитарным или эрмитовым оператором (теорема 2.1.1 и предложение 2.1.2). Установлено необходимое и достаточное условие, при котором набор проекторов является попарно ортогональным (теорема 2.1.9).

В §2.2 получены характеризации следов различными неравенствами (теоремы 2.2.6, 2.2.8). В большинстве из них сработали признаки коммутирования проекторов из параграфа 2.1. Выдвинута одна гипотеза о характеризации следов среди всех весов на алгебре фон Неймана и доказана ее справедливость в широком классе весов (теорема 2.2.2).

В §2.3 получены характеризации следов неравенствами Пайерлса–Боголюбова и Араки–Либа-Тирринга (теоремы 2.3.2 и 2.3.6). В частности, дан положительный ответ на старый вопрос Я. Земанека[27]. Найдено достаточное условие коммутативности C^*-алгебры (следствие 2.3.7).

В §2.4 приведены характеризации следов неравенствами монотонности (теорема 2.4.4, следствия 2.4.5 и 2.4.6) и неравенством Юнга для степенных функций (теорема 2.4.1).

В §2.5 дано положительное решение упомянутой выше проблемы У. Хаагерупа[16] для случая абелевых W^*-алгебр (теорема 2.5.6) и найден общий вид нормальных субаддитивных весов на этих алгебрах (следствие 2.5.7). Также получено приложение к разложениям сублинейных ожиданий на измеримых функциях[28] (следствие 2.5.9).

Основные результаты по перечисленным темам опубликованы в статьях автора [2, 12, 14, 16, 17, 19, 20, 27], и в совместных с О. Е. Тихоновым статьях [10, 32], в совместной с А. С. Русаковым и О. Е. Тихоновым статье [30].

След τ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ называется *полуконечным*, если $\tau(A) = \sup\{\tau(B) :\ B \in \mathcal{M}^+,\ B \leq A,\ \tau(B) < +\infty\}$ для каждого $A \in \mathcal{M}^+$; *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ $(X_i, X \in \mathcal{M}^+) \Longrightarrow \tau(X) = \sup \tau(X_i)$.

[27] Zemánek J. A review Zbl 0942.15015 / J. Zemánek // Zentralblatt MATH. http://www.zentralblatt-math.org

[28] Лебедев А. А. О монотонных сублинейных доминируемых функционалах на пространстве измеримых функций / А. А. Лебедев // Сибир. матем. журн. – 1992. – Т. 33, № 6. – С. 94–105.

Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, $\widetilde{\mathcal{M}}$ – *-алгебра всех τ-измеримых операторов, $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ – идеал τ-компактных операторов в $\widetilde{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}_\tau$ – множество всех $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ с $\tau(P) < \infty$, $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \bigcap \widetilde{\mathcal{M}}^+$ для $\mathcal{L} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$.

В *-алгебре $\widetilde{\mathcal{M}}$ вводится топология t_τ сходимости по мере[12,13], фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$U(\varepsilon, \delta) = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \exists Q \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}} \ (\|XQ\| \leq \varepsilon \text{ и } \tau(Q^\perp) \leq \delta)\}, \ \ \varepsilon > 0, \, \delta > 0.$$

Известно, что $\langle \widetilde{\mathcal{M}}, \ t_\tau \rangle$ является полной метризуемой топологической *-алгеброй, причем $\mathcal{M}$ плотно в $\langle \widetilde{\mathcal{M}}, \ t_\tau \rangle$.

Через $\mu_t(X)$ обозначим *невозрастающую перестановку* оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$, т. е. функцию $\mu(X) \colon (0, \infty) \to [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu_t(X) = \inf\{\|XP\| : \ \ P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}, \quad \tau(P^\perp) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Пусть m – линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Некоммутативное L_p-пространство Лебега ($0 < p < \infty$), ассоциированное с $(\mathcal{M}, \tau)$ может быть определено как

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \ \mu(X) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$$

с F-нормой (нормой для $1 \leq p < \infty$) $\|X\|_p = \|\mu(X)||_p$, $X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Продолжение τ до единственного линейного функционала на линеал $\mathcal{M} \cap L_1(\mathcal{M}, \tau)$, а затем и на все $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ обозначаем той же буквой τ.

Глава III содержит восемь параграфов и посвящена изучению алгебраических, порядковых и топологических свойств идеальных пространств τ-измеримых операторов.

В §3.1 получено положительное решение одной задачи А. Н. Шерстнева (1993): “*Пусть $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $XY \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Будет ли $X^{1/2} Y X^{1/2}$ принадлежать $L_1(\mathcal{M}, \tau)$?*”

Теорема 3.1.4. *Пусть операторы $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ таковы, что $XY \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда $X^{1/2} Y X^{1/2}$, $Y^{1/2} X Y^{1/2} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)^+$ и*

$$\tau(XY) = \tau(X^{1/2} Y X^{1/2}) = \tau(Y^{1/2} X Y^{1/2}).$$

Установлено, что произведение неотрицательных τ-измеримых операторов не может быть нильпотентом (следствие 3.1.7). В предложении 3.1.10 для X, $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ показано, что

$$XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \Longleftrightarrow X^{1/2}YX^{1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0^+ \Longleftrightarrow Y^{1/2}XY^{1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0^+.$$

В §3.2 выдвинута гипотеза о слабом спектральном порядке по Харди, Литтлвуду и Пойа, усиливающая теорему 3.1.4. Показано, что если эта гипотеза справедлива для каждой непрерывной полуконечной алгебры фон Неймана, то она верна для всех полуконечных алгебр фон Неймана. Доказана справедливость гипотезы для алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, снабженной каноническим следом $\tau = \mathrm{tr}$ (теорема 3.2.3). С помощью этого результата установлено новое свойство вполне симметричных пространств на $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathrm{tr})$ (следствие 3.2.4).

В §3.3 получено усиление и обобщение (на все идеалы с унитарно-инвариантной нормой (см. гл. III, §2[29]) в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$) одной леммы Ф. А. Березина (см. гл. III, с. 146[30]) в случае, когда оператор C ограничен (теорема 3.3.5). Найдено одно достаточное условие обратимости самосопряженного оператора (следствие 3.3.4).

В §3.4 доказана непрерывность естественного вложения метрического идеального пространства на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ с точным нормальным конечным следом τ в $*$-алгебру измеримых операторов $\widetilde{\mathcal{M}}$ с топологией t_τ сходимости по мере (теорема 3.4.4).

С помощью этого факта установлено, что топология t_τ не зависит от конкретного выбора такого следа (следствие 3.4.5) и является минимальной среди всех метризуемых топологий, согласованных со структурой кольца на $\widetilde{\mathcal{M}}$ (теорема 3.4.7). Отсюда получается новое доказательство одной теоремы М. А. Муратова[31] (следствие 3.4.11).

[29]Гохберг И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

[30]Березин Ф. А. Метод вторичного квантования, 2-е изд., доп. / Ф. А. Березин. – М.: Наука, 1986. – 320 с.

[31]Муратов М. А. Сходимости в кольце измеримых операторов / М. А. Муратов // Сбор. науч. тр. Ташкент. ун-та. № 573. Функциональный анализ. – Ташкент: Изд-во ТашГУ, 1978. – С. 51–58.

Топология t_τ сходимости по мере может быть локализована следующим образом. Для $\varepsilon, \delta > 0$ и $P \in \mathcal{M}_\tau^{\rm pr}$ определим множества

$$V(\varepsilon,\delta,P)=\{X\in\widetilde{\mathcal{M}}\colon\ \exists Q\in\mathcal{M}^{\rm pr}\ \ (Q\le P,\ \ \|XQ\|\le\varepsilon\quad\text{и}\quad\tau(P-Q)\le\delta)\},$$

$$W(\varepsilon,\delta,P)=\{X\in\widetilde{\mathcal{M}}\colon\ \exists Q\in\mathcal{M}^{\rm pr}\ \ (Q\le P,\ \|QXQ\|\le\varepsilon\ \text{ и }\ \tau(P-Q)\le\delta)\}.$$

Пространство $\widetilde{\mathcal{M}}$ становится топологическим векторным пространством относительно топологии $t_{\tau l}$ *τ-локальной* (соответственно $t_{w\tau l}$ *слабо τ-локальной*) *сходимости по мере*, базис окрестностей нуля которой образует семейство $\Theta = \{V(\varepsilon,\delta,P)\}_{\varepsilon,\delta>0;\, P\in\mathcal{M}_\tau^{\rm pr}}$ (соответственно $\Theta = \{W(\varepsilon,\delta,P)\}_{\varepsilon,\delta>0;\, P\in\mathcal{M}_\tau^{\rm pr}}$).

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\tau = {\rm tr}$ – канонический след, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и топология t_τ совпадает с топологией нормы $\|\cdot\|$; $t_{\tau l}$ (соответственно $t_{w\tau l}$) совпадает с топологией сильной (соответственно слабой) операторной сходимости. При этом $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ есть идеал компактных операторов в $\mathcal{H}$ и

$$\mu_t(X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X)\chi_{[n-1,n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность s-чисел оператора X, т. е. собственных чисел оператора $|X|(=\sqrt{X^*X})$, взятых в порядке их убывания с учетом их кратности[29], с. 46; χ_A – индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$. Если $\dim\ \mathcal{H} < \infty$, то t_o дискретна на $\mathcal{B}(\mathcal{H})^{\rm pr}$.

Если $\mathcal{M}$ – абелева (т. е. коммутативна), то $\mathcal{M} \simeq L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ и $\tau(f) = \int\limits_\Omega f {\rm d}\mu$, где (Ω,Σ,μ) – локализуемое пространство с мерой, алгебра $\widetilde{\mathcal{M}}$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω,Σ,μ), которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры. При этом топология t_τ является обычной топологией сходимости по мере; $t_{\tau l} = t_{w\tau l}$ и совпадает с известной топологией сходимости по мере на множествах конечной меры. Сеть $\{f_i\}_{i\in I} \subset \widetilde{\mathcal{M}}^{\rm sa}$ (o)-сходится тогда и только тогда, когда существует такая $f \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, что $|f_i| \le f$ μ-почти всюду и f_i μ-почти всюду сходится. Перестановка $\mu_t(f)$ совпадает с невозрастающей перестановкой[32] функции $|f|$.

Если $\tau(\mathbb{I}) < \infty$, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ состоит из всех замкнутых линейных операторов в $\mathcal{H}$, присоединенных к $\mathcal{M}$ и $t_\tau = t_{\tau l} = t_{w\tau l}$.

В §3.5 доказано, что оба отображения $X \mapsto XY$ (при фиксированном Y) и $Y \mapsto XY$ (при фиксированном X) $t_{\tau l}$- и $t_{w\tau l}$-непрерывны на $\widetilde{\mathcal{M}}$ (теорема 3.5.1). Получено обобщение "Основной леммы" теории проекционных методов (см. с. 18–19[33]) на полуконечные алгебры фон Неймана $(\mathcal{M}, \tau)$ (теорема 3.5.2).

В §3.6 установлена непрерывность некоторых операций и замкнутость в топологиях $t_{\tau l}$ и/или $t_{w\tau l}$ нескольких известных классов операторов в $\widetilde{\mathcal{M}}$ (леммы 3.6.3 и 3.6.7). Доказаны аналоги "теоремы о двух милиционерах" и теоремы Вижье для монотонных сетей из $\widetilde{\mathcal{M}}$ (лемма 3.6.4 и теорема 3.6.13). Описана область значений невозрастающих перестановок идемпотентов относительно τ (лемма 3.6.8). Показано, что если алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ бесконечна, то произведение не является совместно $t_{\tau l}$- и $t_{w\tau l}$-непрерывным из $\mathcal{M} \times \mathcal{M}_1$ в $\mathcal{M}$ (теорема 3.6.10).

В §3.7 получены характеризации конечных, счетноразложимых, непрерывных, атомических и конечномерных алгебр в классе всех полуконечных алгебр фон Неймана в терминах топологий $t_{w\tau l}$ и $t_{\tau l}$.

Теорема 3.7.1. *Для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ с точным нормальным полуконечным следом τ следующие условия эквивалентны:*

1) *алгебра $\mathcal{M}$ – конечна;*
2) $t_{w\tau l} = t_{\tau l}$*;*
3) *произведение совместно $t_{\tau l}$-непрерывно из $\widetilde{\mathcal{M}} \times \widetilde{\mathcal{M}}$ в $\widetilde{\mathcal{M}}$;*
4) *произведение совместно $t_{w\tau l}$-непрерывно из $\widetilde{\mathcal{M}} \times \widetilde{\mathcal{M}}$ в $\widetilde{\mathcal{M}}$;*
5) *инволюция $t_{\tau l}$-непрерывна из $\widetilde{\mathcal{M}}$ в $\widetilde{\mathcal{M}}$.*

---

[32] Крейн С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[33] Böttcher A. Infinite matrices and projection methods / A. Böttcher, A. Dijksma, H. Langer, M. A. Dritschel, J. Rovnyak, M. A. Kaashoek. Edited by P. Lancaster, Lectures on operator theory and its applications. Fields Institute monographs. – Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1996. – 340 p.

При доказательстве теоремы 3.7.1 установлена метризуемость этих топологий для конечной счетноразложимой алгебры $\mathcal{M}$. Любопытно сопоставить этот факт с метризуемостью топологий сильной и слабой операторной сходимости на ограниченных подмножествах счетноразложимой (не обязательно полуконечной) алгебры фон Неймана[34]. Как следствие, результат дает новое доказательство одной теоремы Ю. И. Грибанова[35]. Установлена

Теорема 3.7.12. *Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Имеем эквивалентности:*

(i) *алгебра $\mathcal{M}$ конечна $\Longleftrightarrow$ множество $\mathcal{M}^{\mathrm{u}}$ $t_{\tau l}$-замкнуто;*

(ii) *алгебра $\mathcal{M}$ счетноразложима $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \widetilde{\mathcal{M}}_0$ такая, что $X_n \xrightarrow{\tau l} \mathbb{I}\ (n \to \infty)$.*

(iii) *алгебра $\mathcal{M}$ атомическая $\Longleftrightarrow$ топология $t_{\tau l}$ локально выпукла;*

(iv) *алгебра $\mathcal{M}$ не имеет атомов $\Longleftrightarrow$ на $\widetilde{\mathcal{M}}$ не существует нетривиального $t_{\tau l}$-непрерывного линейного функционала.*

(v) *алгебра $\mathcal{M}$ конечномерна $\Longleftrightarrow$ топология $t_{\tau l}$ нормируема.*

Для полуконечных алгебр фон Неймана получено частичное обобщение классической теоремы С. М. Никольского[36] (*“обратимый”* + *“компактный”* = *“обратимый”* + *“конечномерный”*). Для счетноразложимой алгебры фон Неймана показано, что (o)-сходимость последовательности проекторов влечет ее $t_{\tau l}$-сходимость (теорема 3.7.9). Также получены усиления и обобщения некоторых других известных фактов.

В §3.8 доказано, что каждая порядково ограниченная последовательность τ-компактных операторов обладает подпоследовательностью, средние арифметические которой сходятся по мере τ (теорема 3.8.3). Доказан некоммутативный аналог леммы Пратта для пространства $L_1(\mathcal{M}, \tau)$

---

[34] Kadison R. V. Fundamentals of the theory of operator algebras. V. II. Advanced theory / R. V. Kadison, J. R. Ringrose. – New York – London: Academic Press, 1986. – P. 399–1074.

[35] Грибанов Ю. И. О метризации одного пространства функций / Ю. И. Грибанов // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1963. – V. 4, № 1. – P. 43–46.

[36] Никольский С. М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. – 1943. – Т. 7, № 3. – С. 147–166.

(теорема 3.8.21). Результаты являются новыми даже для алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, снабженной каноническим следом $\tau = \mathrm{tr}$. Получено приложение основного результата к пространствам $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, $0 < p \leq 1$. Приведены примеры, показывающие необходимость перехода к средним арифметическим и существенность τ-компактности мажорирующего оператора в теореме 3.8.3.

Основные результаты по перечисленным темам опубликованы в статьях автора [1, 2, 4, 5, 9, 11, 15, 20, 22–26, 28, 31, 34] и в совместной с А. А. Сабировой статье [18].

Автор выражает глубокую благодарность А. Н. Шерстневу за постоянное внимание к работе и плодотворные беседы, способствовавшие улучшению диссертации.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

[1] Bikchentaev A. M. Majorization for products of measurable operators / A. M. Bikchentaev // Inter. J. Theor. Phys. – 1998. – V. 37, № 1. – P. 571–576. – 0,44 п. л.

[2] Бикчентаев А. М. Об одном свойстве L_p-пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана / А. М. Бикчентаев // Математические заметки. – 1998. – Т. 64, № 2. – С. 185–190. – 0,44 п. л.

[3] Бикчентаев А. М. О представлении линейных операторов в гильбертовом пространстве в виде конечных сумм произведений проекторов / А. М. Бикчентаев // Докл. РАН. – 2003. – Т. 393, № 4. – С. 444–447. – 0,25 п. л.

[4] Bikchentaev A. M. The continuity of multiplication for two topologies associated with a semifinite trace on von Neumann algebra / A. M. Bikchentaev // Lobachevskii J. Math. – 2004. – V. 14. – P. 17–24. (http:

// ljm.ksu.ru). – 0,50 п. л.

[5] Бикчентаев А. М. О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана / А. М. Бикчентаев // Математические заметки. – 2004. – Т. 75, № 3. – С. 342–349. – 0,50 п. л.

[6] Бикчентаев А. М. Проекторно-выпуклые комбинации в C^*-алгебрах со свойством унитарной факторизации / А. М. Бикчентаев, А. Н. Шерстнев // Математические заметки. – 2004. – Т. 76, № 4. – С. 625–628. – 0,25 п. л.

[7] Бикчентаев А. М. О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов / А. М. Бикчентаев // Сибирский математический журнал. – 2005. – Т. 46, № 1. – С. 32–45. – 0,90 п. л.

[8] Бикчентаев А. М. Проекторно-выпуклые комбинации в C^*-алгебрах и проблема инвариантного подпространства. I / А. М. Бикчентаев // Математические заметки. – 2006. – Т. 79, № 2. – С. 311–315. – 0,31 п. л.

[9] Бикчентаев А. М. Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана / А. М. Бикчентаев // Тр. Матем. ин-та РАН им. В.А. Стеклова. – 2006. – Т. 255. – С. 41–54. – 0,90 п. л.

[10] Bikchentaev A. M. Characterization of the trace by monotonicity inequalities / A. M. Bikchentaev, O. E. Tikhonov // Linear Algebra and its Applications. – 2007. – V. 422, № 1. – P. 274–278. – 0,31 п. л.

[11] Бикчентаев А. М. Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана, II / А. М. Бикчентаев // Математические заметки. – 2007. – Т. 82, № 5. – С. 783–786. – 0,25 п. л.

[12] Бикчентаев А. М. О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов, III. Коммутаторы в C^*-алгебрах / А. М. Бикчентаев // Математический сборник. – 2008. – Т. 199, № 4. – С. 3–20. – 1,06 п. л.

[13] Bikchentaev A. M. States on symmetric logics: conditional probability and independence / A. M. Bikchentaev // Lobachevskii J. Math. – 2009. – V. 30, № 2. – P. 101–106. – 0,44 п. л.

[14] Бикчентаев А. М. Перестановочность проекторов и характеризация следа на алгебрах фон Неймана. I / А. М. Бикчентаев // Известия вузов. Матем. – 2009. – № 12. – С. 80–83. – 0,25 п. л.

[15] Бикчентаев А. М. Об одной лемме Ф. А. Березина / А. М. Бикчентаев // Математические заметки. – 2010. – Т. 87, № 5. – С. 796–800. – 0,32 п. л.

[16] Бикчентаев А. М. Перестановочность проекторов и характеризация следа на алгебрах фон Неймана / А. М. Бикчентаев // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1228–1236. – 0,54 п. л.

[17] Бикчентаев А. М. Перестановочность проекторов и характеризация следа на алгебрах фон Неймана. II / А. М. Бикчентаев // Математические заметки. – 2011. – Т. 89, № 4. – С. 483–494. – 0,75 п. л.

[18] Бикчентаев А. М. Мажорируемая сходимость по мере измеримых операторов и свойство Банаха-Сакса / А. М. Бикчентаев, А. А. Сабирова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2011. – Т. 18, № 1. – С. 78–79. – 0,10 п. л.

[19] Bikchentaev A. M. The Peierls-Bogoliubov inequality in C^*-algebras and characterization of tracial functionals / A. M. Bikchentaev // Lobachevskii J. Math. – 2011. – V. 32, № 3. – P. 175–179. – 0,31 п. л.

[20] Бикчентаев А. М. О задаче Хаагерупа о субаддитивных весах на W^*-алгебрах / А. М. Бикчентаев // Известия вузов. Матем. – 2011. – № 10. – С. 94–98. – 0,30 п. л.

[21] Bikchentaev A. M. Representation of tripotents and representations via tripotents / A. M. Bikchentaev, R. S. Yakushev // Linear Algebra and its Applications. – 2011. – V. 435, № 9. – P. 2156–2165. Доступна с 10.06.2011, doi:10.1016.j.laa.2011.04.003 – 0,63 п. л.

Публикации в других изданиях

[22] Бикчентаев А. М. F-нормированные идеальные пространства измеримых операторов / А. М. Бикчентаев. Рукопись деп. Казанск. ун-том 04.07.1988, № 5375-В88 Деп. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1988. – 21 с. – 1,32 п. л.

[23] Бикчентаев А. М. К геометрии некоммутативных пространств L_p $(0 < p \leq 1)$ / А. М. Бикчентаев // Функциональный анализ. Межвуз. сб. науч. тр. – № 31. – Ульяновск: Изд–во УлГПИ, 1990. – С. 29–34. – 0,31 п. л.

[24] Бикчентаев А. М. Неравенство треугольника для некоторых пространств измеримых операторов / А. М. Бикчентаев // Конструктивная теория функций и функциональный анализ. – № 8. – Казань: Изд–во КГУ, 1992. – С. 23–32. – 0,63 п. л.

[25] Bikchentaev A. M. On noncommutative function spaces / A. M. Bikchentaev // Selected Papers in K-theory. Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1992. – V. 154. – P. 179–187. – 0,56 п. л.

[26] Бикчентаев А. М. Подпространства Орлича случайных нормированных пространств / А. М. Бикчентаев // Функциональный анализ. Межвуз. сб. науч. тр. – № 34. – Ульяновск: Изд–во УлГПИ, 1993. – С. 3–15. – 0,80 п. л.

[27] Бикчентаев А. М. Характеризация следов в некоторых классах весов на алгебре фон Неймана / А. М. Бикчентаев // В сб.: Теория функций и ее приложения. Казань: Казанск. фонд Математика, 1995. С. 8–9. – 0,10 п. л.

[28] Бикчентаев А. М. Об одном неравенстве для эрмитовых операторов / А. М. Бикчентаев // Алгебра и анализ. Матер. конф., посв. 100-летию Б. М. Гагаева. – Казань: Изд-во Казанск. матем. о-во, 1997. – С. 35–36. – 0,10 п. л.

[29] Бикчентаев А. М. Полуортогональные проекторы в гильбертовом пространстве / А. М. Бикчентаев. В кн.: На рубеже веков. Научно-иссл. институт математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанск. гос. ун-та. 1998 – 2002 гг. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-во, 2003. – С. 108–114. – 0,50 п. л.

[30] Бикчентаев А. М. Характеризация следа степенными неравенствами /А. М. Бикчентаев, А. С. Русаков, О. Е. Тихонов // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 23. Алгебра и анализ – 2004. Матер. межд. конф., посв. 200-летию Казан. гос. ун–та (Казань, 2 – 9 июля 2004 г.). – Казань: Изд-во Казан. матем. о-во, 2004. – С. 45–46. – 0,10 п. л.

[31] Бикчентаев А. М. О полуаддитивных весах на W^*-алгебрах / А. М. Бикчентаев // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 25. Актуальные проблемы математики и механики. Матер. межд. научн. конф. (Казань, 26 сентября – 1 октября 2004 г.). – Казань: Изд-во Казан. матем. о-во, 2004. – С. 45–47. – 0,16 п. л.

[32] Bikchentaev A. M. Characterization of the trace by Young's inequality / A. M. Bikchentaev, O. E. Tikhonov // J. Inequalities in Pure and Applied Math. – 2005. – V. 6, № 2. – Article 49. – 0,25 п. л.

[33] Bikchentaev A. M. Representation of elements of von Neumann algebras in the form of finite sum of products of projections. II / A. M. Bikchentaev // Operator Theory 20. Proc. Inter. Conf. Operator Theory'20 (Timisoara, Romania, 2004), Theta Series in Advanced Mathematics. V. 6. – Bucharest: Theta, 2006. – P. 15–23. – 0,60 п. л.

[34] Bikchentaev A. M. Local convergence in measure on semifinite von Neumann algebras. III / A. M. Bikchentaev // Hot Topics in Operator Theory. Proc. Inter. Conf. Operator Theory'21 (Timisoara, Romania, 2006), Theta Series in Advanced Mathematics. V. 9. – Bucharest: Theta, 2008. – P. 1–12. – 0,75 п. л.